ECOLE SUPERIEURE D'INGENIEURS DE MARSEILLE 1982

OPTIONS M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée : 4 heures

E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, dont on fixe une base $\mathcal{B}$. Pour tout $A \in \mathcal{L}(E)$, on note $\sigma(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres, et $\| A \|$ la quantité $\sup\limits_{i,j} | a_{ij} |$ où (a_{ij}) désigne la matrice de A dans $\mathcal{B}$.

On admettra sans démonstration les résultats suivants :

— l'application $X \longmapsto \|X\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$, et $\|X \circ Y\| \leqslant n \|X\| . \|Y\|$;

— si l'on considère une application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(E)$, telle que, pour tout λ, $\varphi(\lambda)$ ait pour matrice, dans $\mathcal{B}$, $(a_{ij}(\lambda))$, en supposant que φ est dérivable en λ_0, $\varphi'(\lambda_0)$ a pour matrice dans $\mathcal{B}$ (b_{ij}), avec :

$$b_{ij} = \frac{d a_{ij}}{d\lambda}(\lambda_0), \ \forall i, \ \forall j;$$

— si φ est continue sur le segment $[a, b]$, $\Psi = \int_a^b \varphi(\lambda)\, d\lambda$ aura pour matrice dans $\mathcal{B}$, (c_{ij}) avec : $c_{ij} = \int_a^b a_{ij}(\lambda)\, d\lambda, \ \forall i, \ \forall j;$

— Si $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k . x^k \in \mathbb{C}[x]$, et si $A \in \mathcal{L}(E) - \{0\}$, l'application $\pi_A : P \in \mathbb{C}[x] \longmapsto P(A) = \sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k . A^k$, avec $A^0 = I_E$, est un morphisme d'algèbres; son noyau Ker π_A n'est pas réduit au polynôme nul, et l'on note Λ_A le générateur unitaire de Ker π_A.

On pose enfin $R_\lambda(A) = (A - \lambda I_E)^{-1}$ pour $\lambda \notin \sigma(A)$.

I

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$.

1° Montrer que les zéros de Λ_A sont dans $\sigma(A)$.

2° *a.* Si $P = \sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k . x^k$ est un élément non nul de $\mathbb{C}[x]$, montrer qu'il existe des polynômes $P_0, \ldots, P_{m-1}$ tels que chaque P_j soit de degré au plus égal à $(m - j - 1)$, et que : $(P(A) - P(\lambda) I_E) \circ R_\lambda(A) = \sum\limits_{j=0}^{m-1} P_j(\lambda) . A^j$ pour tout $\lambda \notin \sigma(A)$.

b. En déduire qu'il existe $Q_0, \ldots, Q_{n-1}$ fractions rationnelles sur $\mathbb{C}$ n'admettant aucun élément de $\sigma(A)$ comme pôle, telles que :

$$R_\lambda(A) = \sum_{j=0}^{n-1} Q_j(\lambda) A^j \quad \text{pour tout } \lambda \notin \sigma(A)$$

c. Montrer la continuité de l'application θ_A qui, à tout $\lambda \in \mathbb{R} - \sigma(A)$ associe $R_\lambda(A)$; si $X \in \mathcal{L}(E)$, vérifier la continuité de : $\lambda \longmapsto \theta_A(\lambda) \circ X$.

3° Montrer que, si λ et μ sont dans $\mathbb{C} - \sigma(A)$, $R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda \circ R_\mu$. En déduire que θ_A, définie en 2° *c*, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{d^k}{d\lambda^k}[R_\lambda(A)] = k! \, [R_\lambda(A)]^{k+1}$.

4° Soit S une partie de $\mathbb{C}$, et $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in S}$ une famille dans $\mathcal{L}(E)$ vérifiant pour tout couple (λ, μ) d'éléments de $\mathbb{C}$: $\varphi_\lambda - \varphi_\mu = (\lambda - \mu) \varphi_\lambda \circ \varphi_\mu$; montrer que, s'il existe $\mu_0 \in S$, tel que $\varphi_{\mu_0} \in GL(E)$, alors il existe $A \in \mathcal{L}(E)$, tel que : $\forall \lambda \in S$, $\varphi_\lambda \in GL(E)$ et $(\varphi_\lambda)^{-1} = A - \lambda I_E$.

II

Soit E de dimension 2, et $A \in \mathcal{L}(E)$, dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

1° Trouver une base $\mathcal{C}$ dans laquelle la matrice de A est triangulaire; calculer $\mathcal{A}^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et déterminer la matrice, dans $\mathcal{C}$, de $R_\lambda(A)$, $\lambda \in \mathbb{C} - \sigma(A)$.

.../...

-141-

2° Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$I_k = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\theta}}{1 - 2e^{i\theta}}\, d\theta \quad \text{et} \quad J_k = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\theta}}{(1 - 2e^{i\theta})^2}\, d\theta.$$

(On rappelle que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$.)

3° On pose, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $M(\theta) = R_{(2e^{i\theta})}(A)$; démontrer que, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} 2^{k+1} \cdot e^{i(k+1)\theta} \cdot M(\theta)\, d\theta.$$

4° Soit, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $N(\theta) = R_{(1+e^{i\theta})}(A)$.

a. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$E_k = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (1 + e^{i\theta})^k \cdot e^{i\theta} \cdot N(\theta)\, d\theta$$

et comparer le résultat à celui de la question précédente.

b. A partir de l'égalité : $1 + e^{i\theta} = 2 \cos\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$, donner un sens à $E_{\frac{1}{2}}$, puis calculer $E_{\frac{1}{2}}$ et $\left(E_{\frac{1}{2}}\right)^2$.

5° *a.* Calculer

$$F = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\operatorname{Log} 2 \cos\frac{\theta}{2} + i\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\theta} \cdot N(\theta)\, d\theta$$

(où Log désigne le logarithme népérien).

b. Montrer que la suite $F_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{F^k}{k!}$ a une limite quand $n \to +\infty$, et trouver une relation simple entre cette limite et A.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail